Στοιχεια Διαφορικης Γεωμετριας

Ενδεικτικες Λυσεις στα Θεματα Ιουνιου 2015

Θέμα 1. *Έστω καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$, της οποίας καμμία εφαπτόμενη ευθεία δεν διέρχεται από το σημείο $(0,0,0)$. Θεωρούμε την καμπύλη $\tilde{c}(s) = \frac{c(s)}{\rho(s)}$, όπου $\rho(s) = ||c(s)||$.*

(α΄) Αποδείξτε ότι η $\tilde{c}$ είναι κανονική και σφαιρική. (ΜΟΡΙΑ 10)

(β΄) Αποδείξτε ότι το s είναι μήκος τόξου και για την $\tilde{c}$ αν και μόνο αν ισχύει $\rho^2 + (\dot{\rho})^2 = 1$. (ΜΟΡΙΑ 15)

Λύση. (α΄) Επειδή $|c|^2 = \rho^2$ παραγωγίζοντας λαμβάνουμε ότι

$$\langle c, \vec{t} \rangle = \rho\dot{\rho}. \tag{1}$$

Επομένως με χρήση της (1) προκύπτει ότι

$$|\tilde{c}'|^2 = \frac{1-(\dot{\rho})^2}{\rho^2}. \tag{2}$$

Συνεπώς από (2) έπεται ότι: $|\tilde{c}'|^2 \neq 0,\ \forall s \in I$, διότι αν υπήρχε $s_0 \in I$ τέτοιο ώστε $|\tilde{c}'(s_0)|^2 = 0$, τότε $(\dot{\rho}(s_0))^2 = 1$ το οποίο από (1) θα έδινε ότι: $c(s_0) \parallel \vec{t}(s_0)$ κάτι το οποίο θα ήταν άτοπο εξ υποθέσεως. Επομένως, $\tilde{c}$ κανονική. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι $|\tilde{c}| = 1,\ \forall s \in I$, το οποίο μας λέει ότι η $\tilde{c}$ κείται επί της μοναδιαίας σφαίρας.

(β΄) Από (2) έπεται άμεσα το ζητούμενο.

Θέμα 2. *(α΄) Δώστε ένα παράδειγμα καμπύλης με παράμετρο t και μη σταθερή καμπυλότητα $k(t) < 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δικαιολογείστε πλήρως. (ΜΟΡΙΑ 10)*

(β΄) Βρείτε όλες τις καμπύλες $c : I \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητα k παντού θετική οι οποίες πληρούν τη συνθήκη $\ddot{\ddot{c}} + \ddot{c} = 0$. (ΜΟΡΙΑ 15)

Λύση. (α΄) Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι η καμπύλη

$$c(t) := (t, -e^t), \quad t \in \mathbb{R},$$

έχει παντού μη σταθερή καμπυλότητα $k(t) < 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β΄) Υπολογίζουμε και έχουμε:

$$\begin{aligned} \ddot{c} &= k \cdot \vec{n} \\ \ddot{\ddot{c}} &= (-3k\dot{k}) \cdot \vec{t} + (\ddot{k} - k^3 - \tau^2 k) \cdot \vec{n} + (2\tau\dot{k} + \dot{\tau}k) \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Επομένως από τη συνθήκη $\ddot{\ddot{c}} + \ddot{c} = 0$ λαμβάνουμε ότι:

$$k = \text{σταθ.} > 0, \quad \tau = \text{σταθ.} \ \ \& \ \ \tau^2 + k^2 = 1.$$

- **Περίπτωση 1:** Αν $\tau = 0$ τότε η καμπύλη c είναι επίπεδη με $k = 1$, δηλαδή κύκλος ακτίνας 1.
- **Περίπτωση 2:** Αν $\tau \neq 0$ τότε $k = \sqrt{1-\tau^2}$ και συνεπώς η c θα είναι κυλινδρική έλικα.

Θέμα 3. *(α΄) Έστω S κανονική επιφάνεια χωρίς ομφαλικά σημεία και με μέση καμπυλότητα $H \equiv 0$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση Weingarten πληροί τη σχέση*

$$\langle L_p w_1, L_p w_2 \rangle = -K(p)\langle w_1, w_2 \rangle,$$

όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss, $p \in S$ και $w_1, w_2 \in T_pS$. (ΜΟΡΙΑ 12)

(β΄) Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$X(s,t) = (x(s), y(s), t),$$

όπου $c(s) = (x(s), y(s), 0)$ είναι καμπύλη του Oxy-επιπέδου με παράμετρο το μήκος τόξου. Αποδείξτε ότι η X είναι κανονική κι αναπτυκτή. Βρείτε την καμπύλη c ώστε η επιφάνεια να είναι ελαχιστική. Σε αυτή την περίπτωση περιγράψτε γεωμετρικά την εικόνα της X. (ΜΟΡΙΑ 13)

Λύση. (α') Υπενθυμίζουμε την ταυτότητα μεταξύ των θεμελιωδών μορφών:

$$III - 2H \cdot II + K \cdot I = 0.$$

Επειδή S ελαχιστική έπεται ότι:

$$III = -K \cdot I.$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle L_p w_1, L_p w_2 \rangle &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ |L_p(w_1 + w_2)|^2 - |L_p w_1|^2 - |L_p w_2|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \{ III_p(w_1 + w_2) - III_p(w_1) - III_p(w_2) \} \\
&= (-K(p)) \cdot \frac{1}{2} \cdot \{ I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \} \\
&= -K(p) \langle w_1, w_2 \rangle.
\end{aligned}$$

(β') Εύκολα ελέγχουμε ότι η επιφάνεια X είναι κανονική, αφού

$$|X_s \times X_t| = 1, \quad \forall (s,t) \in I \times \mathbb{R}.$$

Επίσης, η επιφάνεια είναι κυλινδρική οπότε έπεται άμεσα ότι είναι αναπτυκτή. Επιπλέον, η παραμετρική επιφάνεια X είναι δίκτυο γραμμών καμπυλότητας συνεπώς έπεται ότι $k_1 = k$ και $k_2 = 0$, ως προς κατάλληλο προσανατολισμό της X, όπου k_1, k_2 είναι οι κύριες καμπυλότητες σε κάθε σημείο της X και k είναι η καμπύλοτητα της καμπύλης c. Επομένως, για να είναι η X ελαχιστική θα πρέπει $H = 0$, δηλαδή $k_1 = -k_2 = 0$. Τότε όμως $k = 0$ για κάθε $s \in I$ από όπου προκύπτει ότι η c θα είναι τμήμα ευθείας. Συνεπώς, η εικόνα της X σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ότι θα είναι τμήμα επιπέδου.

Θέμα 4. *Δίνεται η κανονική επιφάνεια S με εξίσωση $z = 3x^2 - 2y^2$.*

(α') Βρείτε τις ασυμπτωτικές γραμμές της S. (ΜΟΡΙΑ 05)
(β') Εξετάστε αν υπάρχει δίκτυο ασυμπτωτικών γραμμών. (ΜΟΡΙΑ 05)
(γ') Είναι η S αναπτυκτή ή ευθειογενής; (ΜΟΡΙΑ 10)
(δ') Είναι η S τοπικά ισομετρική με σφαίρα; (ΜΟΡΙΑ 05)

Λύση. (α') Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι μια παραμετρική παράσταση της S θα είναι:

$$X(u,v) = \left(\frac{u+v}{\sqrt{3}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}}, 4uv \right), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Επειδή $e = g = 0$ έπεται ότι οι οικογένειες $X(u = \text{σταθ.}, v)$ και $X(u, v = \text{σταθ.})$ είναι ασυμπτωτικές γραμμές.

(β') Από το (α') έπεται ότι το X είναι δίκτυο ασυμπτωτικών γραμμών.

(γ') Επειδή $e = g = 0$ και $f \neq 0$ έχουμε ότι η καμπυλότητα Gauss της S είναι:

$$K = -\frac{f^2}{EG - F^2} < 0.$$

Επομένως η S δεν είναι αναπτυκτή. Επιπλέον η S είναι ευθειογενής αφού

$$X(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{3}}, \frac{u}{\sqrt{2}}, 0 \right) + v \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 4u \right).$$

Δηλαδή οι $X(u = \text{σταθ.}, v)$ είναι ευθείες. [1]

(δ') Η S δεν είναι τοπικά ισομετρική με σφαίρα διότι η καμπυλότητα Gauss της σφαίρας είναι θετική και σταθερή ενώ της S είναι παντού αρνητική.

[1] εύκολα βλέπουμε ότι και οι $X(u, v = \text{σταθ.})$ είναι ευθείες